数学分析（1）：第 8 次习题课

刘思齐

1.（Bernoulli 数）按如下递推公式定义 Bernoulli 数 $\{B_k\}$：

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0 \ (m = 1, 2, \dots).$$

i) 设 $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$，则：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

由此可推出，如果 k 是大于 1 的奇数，则 $B_k = 0$。

ii) 前 n 个自然数的 m 次幂的和可按如下公式计算：

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k (n+1)^{m+1-k}.$$

iii) 证明如下 Taylor 级数：

$$\begin{aligned}
x \cot x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} (2^{2k}), \\
x \tan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} (2^{2k} - 2^{4k}), \\
\frac{x}{\sin x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} (2 - 2^{2k}), \\
\frac{x^2}{\sin^2 x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} (1 - 2k) 2^{2k}, \\
\log \frac{x}{\sin x} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \frac{2^{2k-1}}{k}, \\
\log \frac{1}{\cos x} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \frac{2^{4k-1} - 2^{2k-1}}{k}.
\end{aligned}$$

iv) 全体自然数的 $2k$ 次方的倒数之和可按如下公式计算：

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}.$$

（此问的严格证明需要用到 Fourier 级数。如果不管严格性，只做形式推导，则可从正弦函数的无穷乘积表达式得到。）

解答： i) 比较 $(e^x-1)f(x)=x$ 的系数，可得 Bernoulli 数的定义关系。接下来，证明 $g(x)=f(x)+\frac{x}{2}$ 是偶函数即可。

ii) 对 n 归纳：当 $n=0$ 时即 Bernoulli 数的定义关系；假设 $n-1$ 时成立，要证明 n 的情形，只需证明：

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k((n+1)^{m+1-k}-n^{m+1-k})=n^m.$$

事实上，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k((n+1)^{m+1-k}-n^{m+1-k})\\=&\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k\sum_{l=0}^{m-k}\binom{m+1-k}{l}n^l\\=&\frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m}n^l\sum_{k=0}^{m-l}\binom{m+1}{k}\binom{m+1-k}{l}B_k\\=&\frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m}n^l\binom{m+1}{l}\sum_{k=0}^{m-l}\binom{m-l+1}{k}B_k\\=&\frac{n^m}{m+1}\binom{m+1}{m}=n^m.\end{aligned}$$

iii) 先证 $x\cot x$ 的 Taylor 级数。设等式右边等于 $h(x)$，则问题等价于 $\cos x=h(x)\frac{\sin x}{x}$，通过比较系数可知，这个恒等式等价于

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n+1}{m}B_k\,2^k=0,$$

同样的方式返回去又可证明这一恒等式等价于

$$x\coth x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}(2^{2k}),$$

上式左边其实就是 $g(2x)$，所以由 i) 可知恒等式成立。

对于 $x\tan x$，利用恒等式 $\tan x=\cot x-2\cot(2x)$ 即可。

对于 $x\csc x$，利用恒等式 $\csc x=\cot\frac{x}{2}-\cot x$ 即可。

对于 $x^2\csc^2 x$，它其实等于 $x\cot x-x(x\cot x)'$。

对于 $\log\frac{x}{\sin x}$，它的导数等于 $\frac{1-x\cot x}{x}$。

对于 $\log\frac{1}{\cos x}$，它的导数等于 $\tan x$。

iv) 正弦函数有如下无穷乘积表示（证明要用到 Fourier 级数）：

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right).$$

将它变形为

$$\log \frac{x}{\sin x} = \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}},$$

将右边的每一项关于 x 做 Taylor 展开，然后交换求和次序，最后比较系数即可。（这种计算的合法性要到函数项级数部分才能证明。） $\square$

2. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 具有 n 阶导数，定义

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right| \ (k=1,\dots,n).$$

求证：

i) 若 M_0、M_n 为有限数，则 M_k $(k=1,\dots,n-1)$ 都是有限数，且有：

$$M_k \le 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

ii) 当 $n=3$ 时，有更好的结果：

$$M_1 \le \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2} M_0^{\frac{2}{3}} M_3^{\frac{1}{3}}, \quad M_2 \le 3^{\frac{1}{3}} M_0^{\frac{1}{3}} M_3^{\frac{2}{3}}.$$

iii) 当 $n=4$ 时，则有：

$$M_1 \le \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{4}} M_0^{\frac{3}{4}} M_4^{\frac{1}{4}}, \quad M_2 \le \frac{2}{\sqrt{3}} M_0^{\frac{2}{4}} M_4^{\frac{2}{4}}, \quad M_3 \le (6)^{\frac{1}{4}} M_0^{\frac{1}{4}} M_4^{\frac{3}{4}}.$$

（此问较难，需要求解二元函数的极值问题，下学期才会讲到。不过如果熟悉均值不等式的相关技巧的话也可以用初等方法求出。）

解答： i) 对于任意的 $x,t\in\mathbb{R}$，有如下 Lagrange 余项型的 Taylor 公式：

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}t^n,$$

取 $n-1$ 个不同的 t，可得关于 $f'(x),\dots,f^{(n-1)}(x)$ 的线性方程组，解出解之后再用三角不等式放缩即可说明所有的 M_k 都是有限的。

要证那个不等式，首先根据课堂上讲过的例子，我们有：

$$M_k^2 \le 2\, M_{k-1}\, M_{k+1}, \quad k=1,\dots,n-1.$$

将第 1 个不等式取 $n-1$ 次方，第 2 个取 $n-2$ 次方，……，第 $n-1$ 个取 1 次方，然后相乘并开 n 次方可得：

$$M_1 \le 2^{\frac{(n-1)}{2}} M_0^{\frac{n-1}{n}} M_n^{\frac{1}{n}}.$$

其它的 M_k 可通过上式利用数学归纳法得到。

ii) 更好的常数的证明方法其实和 i) 差不多，只不过构造线性方程组时要更精巧一些。考虑如下三阶 Taylor 公式：

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(x)}{2}t^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}t^3,$$
$$f(x-t) = f(x) - f'(x)t + \frac{f''(x)}{2}t^2 - \frac{f'''(\eta)}{6}t^3,$$

相减得

$$f'(x) = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2t} - (f'''(\xi) + f'''(\eta))\frac{t^2}{12},$$

取上确界得：

$$M_1 \le \frac{M_0}{t} + M_3\frac{t^2}{6}$$

右边在 $t^3 = \frac{3M_0}{M_3}$ 时取得最小值，即所求证的不等式。相减改相加可得 M_2 的不等式。

iii) 方法类似上一问，取 $x+t, x-t, x+s, x-s$ 时的 Taylor 展开作为方程组可解出依赖 t, s 的线性的上界，然后寻找适当的 t, s 使得上界取得极小值。

注：这类不等式统称为 Landau-Kolmogorov 不等式，课堂上讲过的 $n = 2$ 的情况和上面的 $n = 3$ 的情况的常数都是最佳的，但 $n = 4$ 的情况的常数仍有改进余地。一般情况的最佳常数由 Kolmogorov 给出。可参考：

http://mathworld.wolfram.com/Landau-KolmogorovConstants.html

□

3.（n 阶微分形式不变性）设 $E = (a, b)$、$D = (c, d)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的两个开区间，$g : D \to E$、$f : E \to \mathbb{R}$ 是两个 n 阶可导的函数，$t_0 \in D$, $x_0 = g(t_0) \in E$。求证：

$$T_n(f \circ g, t_0; t) = T_n(T_n(f, x_0; g(t)), t_0; t).$$

解答：（证法一）根据 Taylor 定理，

$$T_n(f, x_0; g(t)) = f(g(t)) + o((g(t) - g(t_0))^n),$$

注意

$$(g(t) - g(t_0))^n = (g'(t_0)(t - t0) + o(t - t_0))^n = O((t - t_0)^n)$$

所以 $T_n(f, x_0; g(t))$ 和 $f(g(t))$ 具有相同的 n 阶 Taylor 多项式。

（证法二）设 $F(t) = T_n(f, x_0; g(t))$，可利用 Faà di Bruno 公式直接计算 $F(t)$ 在 t_0 处的各阶导数，结果和 $f(g(t))$ 的各阶导数相同。这个证法并不麻烦，只不过公式比较长，排版不太容易，所以这里就省略了。 □

4. 设函数 f 在 x 附近具有收敛的 Taylor 级数，记 D 为求导算子，即 $D(f(x)) = f'(x)$，则 f 的 Taylor 级数可写为

$$f(x+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n(f(x)) = \exp(t\,D)(f(x)).$$

现在考虑如下算子 $\delta(f(x)) = xf(x) + f'(x)$，求 $\exp(t\,\delta)(f(x))$。

解答： 用 X 表示乘以 x 这个运算，即 $X(f(x)) = xf(x)$，则

$$\delta(f(x)) = \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right) \circ D \circ \exp\left(\frac{X^2}{2}\right)(f(x)),$$

于是

$$\begin{aligned}
&\exp(t\,\delta)(f(x)) \\
=&\exp\left(-\frac{X^2}{2}\right) \circ \exp(t\,D) \circ \exp\left(\frac{X^2}{2}\right)(f(x)) \\
=&e^{t\,x+\frac{t^2}{2}} f(x+t).
\end{aligned}$$

注：设 $\mathcal{A}$ 是 x 附近的光滑函数构成的线性空间，则 D、X 和 δ 都是 $\mathcal{A}$ 上的线性变换。上面的解法其实就是在说 δ 和 D 是相似的变换，于是它们的指数映射也相似。 $\square$