数学分析（1）：第 10 次习题课

刘思齐

1. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的凸函数，求证：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，若对 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\int_a^b x^i f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

   求证：f 在 $[a,b]$ 上至少有 n 个零点。

3. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $f \geq 0$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{a\leq x\leq b} f(x).$$

4. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续增函数，求证：

$$\int_a^b x\,f(x)\,dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

5. 设 f 是区间 $[1,+\infty)$ 上的连续可导函数，满足：

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+f^2(x)}, \quad f(1) = 1,$$

   求证：$\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在且有 $\lim_{x\to\infty} f(x) \leq 1+\frac{\pi}{4}$。

6. 设 f 是区间 $[0,a]$ 上的连续函数，M、k 是正实数，f 满足：

$$|f(x)| \leq M + k\int_0^x |f(t)|\,dt,$$

   求证：$|f(x)| \leq Me^{k\,x}$。