# 数学分析（1）：第 1 次作业

刘思齐

1. 对于任何对象 $x, y$，定义它们构成的有序对为如下集合：

$$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\},$$

求证：$[(a,b)=(c,d)] \Leftrightarrow [(a=c)\wedge(b=d)]$。（提示：注意区分 $a=b$ 和 $a\neq b$ 的情况。）

2. a) 若 $f: X\to Y$ 是双射，则 $f^{-1}$ 也是双射。（提示：第一步证明 $f^{-1}$ 作为一个二元关系符合函数定义的各个条件，然后证明 $f^{-1}$ 符合双射定义的各个条件。）

   b) 若 $f: X\to Y$、$g: Y\to Z$ 都是函数，则二元关系 $g\circ f$ 是从 $X$ 到 $Z$ 的函数。

   c) 若 $f: X\to Y$、$g: Y\to Z$ 都是双射，则 $g\circ f$ 也是双射，并且有 $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$。

3. 设 $P$ 是一个偏序集，其偏序是 “$<$”，求证：

   a) 对任意的 $x, y\in P$，若 $x\leq y$ 且 $y\leq x$，则 $x=y$。（注意：这一条表明在我们的定义中，符号 “$\leq$” 符合卓里奇书中 “偏序” 的定义。）

   b) 设 $X$ 是 $P$ 的子集。若 $X$ 存在最大值（或最小值、上确界、下确界），则其必唯一。（注意：正因为这些对象的唯一性，我们才可以用一个记号（max、min、sup、inf）来表示它们。）

   c) 若 $a\in P$ 是 $X\subseteq P$ 的一个上界，并且 $a\in X$，则 $a=\max(X)=\sup(X)$。（注意：对下界有类似结论，此处略。）

4. 证明戴德金完备性的定理定义中的 ii) $\Rightarrow$ iii) 和 iii) $\Rightarrow$ i) 部分。回忆一下，设 $P$ 是一个全序集，其全序是 “$<$”，则以下三条等价：

   i) $P$ 的非空集合如果有上界则必有上确界。

   ii) $P$ 的非空集合如果有下界则必有下确界。

   iii) 设 $A$、$B$ 是 $P$ 的非空子集，如果对任意的 $a\in A$、$b\in B$，都有 $a\leq b$，则存在一个 $c\in P$ 使得 $c$ 是 $A$ 的上界、$B$ 的下界。