数学分析（2）：第 10 次习题课

刘思齐

1. 设 V 是一个 n 维 $\mathbb{R}$-线性空间，V^* 是 V 的对偶空间，我们将 V 等同于 V^* 的对偶空间。设 $e_1, \ldots, e_n \in V$ 是 V 的基，$f_1, \ldots, f_n \in V^*$ 是相应的对偶基。课堂上已经证明：

$$F = \{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

构成 $A^k(V)$ 的基，于是

$$E = \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

也构成 $A^k(V^*)$ 的基。求证：存在一个同构 $\phi : A^k(V^*) \to (A^k(V))^*$，使得 $\phi(E)$ 恰是 F 的对偶基。

解答：　只需规定 $A^k(V^*)$ 的每个基向量在 $A^k(V)$ 的每个基向量上按如下方式作用即可：

$$\phi(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_k j_k},$$

其中 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$、$1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$。 □

2. 记 $\Lambda^k(V) = A^k(V^*)$、$\Lambda^*(V) = \bigoplus\limits_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)$。$\Lambda^*(V)$ 称为 V 的外代数或 Grassmann 代数。设 $v_1, \ldots, v_k \in V$，求证：

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \det\nolimits_{i_1 \ldots i_k}(v_1, \ldots, v_k) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k},$$

其中 $\det_{i_1 \ldots i_k}(v_1, \ldots, v_k)$ 表示将 $v_1, \ldots, v_k$ 的坐标排成 n 行 k 列的矩阵后，其中第 $i_1, \ldots, i_k$ 行构成的子式。

解答：　设 $v_i = \sum\limits_{j=1}^{n} v_i^j e_j$，则有

$$\begin{aligned}
& v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \\
= & \left(\sum_{j_1=1}^{n} v_1^{j_1} e_{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^{n} v_k^{j_k} e_{j_k}\right) \\
= & \sum_{1 \leq j_1, \cdots, j_k \leq n} v_1^{j_1} \cdots v_k^{j_k} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} \\
= & \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \left(\sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots v_k^{i_{\sigma(k)}}\right) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \\
= & \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \det{}_{i_1 \ldots i_k}(v_1, \ldots, v_k) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}
\end{aligned}$$

□

3. 设 W 是 V 的 k 维子空间，$S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ 是 W 的一组基，定义

$$p_{i_1 \ldots i_k}(W, S) = \det{}_{i_1 \ldots i_k}(v_1, \ldots, v_k),$$

称为 (W, S) 的 Plücker 坐标。设 $T = \{w_1, \ldots, w_k\}$ 是 W 的另一组基，求证：

$$p_{i_1 \ldots i_k}(W, T) = c(S, T) \cdot p_{i_1 \ldots i_k}(W, S),$$

其中 $c(S, T)$ 是从 S 到 T 的转移矩阵的行列式。特别地，若 S、T 都是标准正交基，则 $c(S, T) = \pm 1$。所以 Plücker 坐标基本上不依赖于基的选取。

解答：　将 v_i、w_i 全部写成列向量，设它们之间的转移矩阵为 A，即

$$(w_1, \ldots, w_k) = (v_1, \ldots, v_k) A,$$

则显然有 $\det_{i_1 \ldots i_k}(w_1, \ldots, w_k) = \det_{i_1 \ldots i_k}(v_1, \ldots, v_k) \cdot \det A$。 □

4. 设 (W_1, S_1)、(W_2, S_2) 是 V 的两个 k 维子空间和相应的基，求证：若对所有的 $i_1, \ldots, i_k$，有

$$p_{i_1 \ldots i_k}(W_1, S_1) = p_{i_1 \ldots i_k}(W_2, S_2),$$

则 $W_1 = W_2$，且 S_1、S_2 之间相差一个行列式为 1 的正交变换。

解答：　对于 $\omega \in \Lambda^k(V)$，定义

$$W_\omega = \{v \in V \mid v \wedge \omega = 0\}.$$

设 $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$，则显然有 $W = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq W_\omega$。另一方面，将 $v_1, \ldots, v_k$ 扩充为 V 一组基 $v_1, \ldots, v_n$，若 $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ 满足 $v \wedge \omega = 0$，则由 $\Lambda^k(V)$ 中基

$$\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

的线性无关性可知 $c_i = 0$ $(i > k)$，所以 $W_\omega \subseteq W$。因此 $W_\omega = W$，所以 $W_1 = W_2$。后一结论则是前一问题的推论。 $\square$

5. 考虑 $n = 4$、$k = 2$ 的特殊情况。设 W 的基为 $S = \{v_1, v_2\}$，对于 $1 \le i < j \le 4$，记 $p_{ij} = p_{ij}(W, S)$。

i) 求证：$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$；

ii) 若 $\omega = \sum\limits_{1 \le i < j \le 4} p_{ij}\, e_j \wedge e_j$ 的坐标 p_{ij} 满足 i) 中的恒等式，则它们一定是某个 (W, S) 的 Plücker 坐标。

（注：一般的 n 维空间中的 k 维子空间的 Plücker 坐标满足更多的二次关系，它们统称为 Plücker 关系。）

解答： i) 设

$$v_1 \wedge v_2 = p_{12}e_1 \wedge e_2 + p_{13}e_1 \wedge e_3 + p_{14}e_1 \wedge e_4 + p_{23}e_2 \wedge e_3 + p_{24}e_2 \wedge e_4 + p_{34}e_3 \wedge e_4,$$

则 $0 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_1 \wedge v_2 = (p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23})e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$。

至于第 ii) 条，将 v_1, v_2 的的坐标设出来，由此算出 p_{ij} 的具体表达式，然后在满足 Plücker 关系的条件下反解 v_1, v_2 的坐标即可。解当然是不唯一的，只要解出一组即可。 $\square$

6. 定义 $\mathbb{R}^6$ 的子集：

$$\tilde{G}_{2,4} = \{(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) \in \mathbb{R}^6 \mid p_1\, p_6 - p_2\, p_5 + p_3\, p_4 = 0,\ \|p\| = 1\}.$$

i) 求证：$\tilde{G}_{2,4}$ 是一个四维流形；

ii) 求证：$\tilde{G}_{2,4}$ 微分同胚与 $S^2 \times S^2$。

（注：$V = \mathbb{R}^4$ 中的定向二维子空间与 $\tilde{G}_{2,4}$ 中的点一一对应。这是最简单的 Grassmann 流形的例子。将 $(4, 2)$ 换成更一般的 (n, k) 则可得更一般的 Grassmann 流形，它们总是一些二次方程（即 Plücker 关系）的交点。）

解答： 设 $\phi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$，$p \mapsto (f(p), g(p))$，其中

$$\begin{aligned} f(p) =& p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 - 1, \\ g(p) =& p_1\, p_6 - p_2\, p_5 + p_3\, p_4, \end{aligned}$$

则 $\tilde{G}_{2,4} = \phi^{-1}(0)$，由此不难证明 $\tilde{G}_{2,4}$ 是流形，并且还是紧的。

定义映射 $H : \tilde{G}_{2,4} \to \mathbb{R}^6$，$p \mapsto (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$，其中

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + p_6, \quad x_2 = p_2 + p_5, \quad x_3 = p_3 + p_4, \\ y_1 &= p_1 - p_6, \quad y_2 = p_2 - p_5, \quad y_3 = p_3 - p_4, \end{aligned}$$

则不难证明 $f(p)=g(p)=0$ 等价于

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=1,$$

所以 H 的像集恰为 $\mathbb{R}^6=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ 中的 $S^2\times S^2$。因为 $\tilde{G}_{2,4}$ 紧、H 是连续单射，所以 $\tilde{G}_{2,4}$ 到 $H(\tilde{G}_{2,4})$ 是同胚。

最后还要证明微分同胚性质。不妨设 (θ_1,ϕ_1)、(θ_2,ϕ_2) 是两个 S^2 上的球面坐标，则 $p_1,\ldots p_6$ 不难通过 S^2 的参数表示得到，由此可说明 H^{-1} 在 $S^2\times S^2$ 的大部分点附近是局部微分同胚。对于使得球面坐标失效的坏点，可以换一根极轴，然后重取球面坐标绕开它们。 □