数学分析（2）：第 2 次习题课

刘思齐

1. 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集，$x_0 \in D$。若 $f: D \to \mathbb{R}$ 的偏导数 f_x, f_y 在 x_0 的某开邻域内存在，且 f_x 在 x_0 处连续，求证：f 在 x_0 处可微。

解答： 设 $x_0 = (u, v)$，$h = (p, q)$，利用 Lagrange 中值定理和 f_y 的存在性可得：

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h) - f(x_0) - f_x(x_0)p - f_y(x_0)q \\
=&f(u+p, v+q) - f(u, v+q) + f(u, v+q) - f(u, v) - f_x(x_0)p - f_y(x_0)q \\
=&f_x(u+\theta p, v+q)p + f_y(u, v)q + o(q) - f_x(x_0)p - f_y(x_0)q \\
=&(f_x(u+\theta p, v+q) - f_x(u, v))p + o(q)
\end{aligned}
$$

因为 f_x 在 x_0 处连续，所以上式在 $h \to 0$ 时是关于 $\|h\|$ 的无穷小，所以 f 可微。 □

2. （Hadamard 引理）设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸区域，$x_0 \in D$，$f \in C^1(D)$。求证：存在 D 上的连续函数 $g_1, \ldots, g_n$ 使得对任意的 $x \in D$，有

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x - x_0)_i, \quad g(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

解答： 设 $h(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$，则 $h \in C^1([0,1])$，由 Newton-Leibniz 公式，

$$f(x) - f(x_0) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)\mathrm{d}t,$$

其中，根据链式法则，

$$h'(t) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)_i,$$

所以只需取

$$g_i(x) = \int_0^1 \partial_i f(x_0 + t(x - x_0))\mathrm{d}t$$

即可。

我们还需要证明上述 g_i 是 D 上的连续函数。因为每个 $\partial_i f$ 是连续的，所以我们只需证明如下事实：如果 $f \in C(D)$，则 $g(x) = \int_0^1 f(x_0 + t(x - x_0))\mathrm{d}t \in C(D)$。

设 I 是连接 x_0, x 两点的闭线段，因为 D 是开集，所以存在 $\delta_0 > 0$，使得 $\bar{B}_{\delta_0}(x_0) \in D$、$\bar{B}_{\delta_0}(x) \in D$，于是 $K = \{x \in D \mid d(x, I) \leq \delta_0\} \subset D$。$K$ 是紧集，函数 f 在 K 上连续，于是一致连续，所以对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于任意的 $x_1, x_2 \in K$，$d(x_1, x_2) < \delta$，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$。我们不妨设 $\delta < \delta_0$，于是对于任意的 $h \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|h\| < \delta$，有

$$g(x+h) - g(x) = \int_0^1 (f(x_0 + t(x - x_0) + t\,h) - f(x_0 + t(x - x_0)))\mathrm{d}t,$$

注意 $\|t\,h\| = t\|h\| < \delta$，所以

$$|g(x+h) - g(x)| < \int_0^1 \varepsilon \mathrm{d}t = \varepsilon,$$

所以 g 在 x 处连续。 □

3. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸区域，$f \in C^1(D)$，求证：f 为凸函数当且仅当对任意的 $x, y \in D$，

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x).$$

解答： 若 f 凸，则对任意的 $x, y \in D$，以及 $\lambda \in [0, 1]$，有

$$f(y) - f(x) \geq \frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda},$$

取极限 $\lambda \to 0$ 即得所求的不等式。

反之，对于任意的 $x, y \in D$，以及 $\lambda \in [0, 1]$，设 $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$，由已知条件，

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z),$$
$$f(y) \geq f(z) + f'(z)(y - z)$$

将第一个不等式乘以 $(1 - \lambda)$、第二个不等式乘以 λ，然后相加得：

$$(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f(z) + f'(z)((1 - \lambda)(x - z) + \lambda(y - z)) = f(z).$$

所以 f 是凸函数。 □

4.

i) 设 $M_n(\mathbb{R})$ 是 n 阶实矩阵的全体构成的线性空间，求证：行列式运算 $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是一个可微映射，并计算偏导数 $\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A$，其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$。

ii) 设 $A : [a, b] \to M_n(\mathbb{R})$，$t \mapsto A(t)$ 是一个可微映射，求证：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det A(t) = \mathrm{Tr}\left(A^*(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\right),$$

其中 A^* 表示 A 的伴随矩阵。

解答： i) 行列式是矩阵元的多项式，所以显然可微。将 $\det(A)$ 按第 i 行展开得：

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

于是易知 $\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A = A_{ij}$.

ii) 根据链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det A(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}(t)}{\partial t} = \mathrm{Tr}\left(A^*(t) \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} \right).$$

□

（注：当 A 可逆时，上述公式又可写为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log\det A = \mathrm{Tr}\left(A^{-1} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \right),$$

这是一个特别有用的公式，在很多数学分支中都会用到。）

5. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可微，若存在 $d_1, \ldots, d_n, d_f \in \mathbb{N}$ 使得对任意的 $t \in \mathbb{R}_{>0}$，有

$$f(t^{d_1}x_1, \ldots, t^{d_n}x_n) = t^{d_f} f(x_1, \ldots, x_n),$$

则称 f 是拟齐次的（若 $d_1 = \cdots = d_n = 1$，则称 f 为齐次的）。求证：f 是拟齐次的当且仅当 f 满足如下方程：

$$d_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + d_n x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = d_f f.$$

解答： 若 f 是拟齐次的，对定义条件中的 t 求导可得

$$\begin{aligned} & d_1 t^{d_1 - 1} x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t^{d_1}x_1, \ldots, t^{d_n}x_n) + \cdots + d_n t^{d_n - 1} x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t^{d_1}x_1, \ldots, t^{d_n}x_n) \\ = & d_f t^{d_f - 1} f(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

然后取 $t = 1$ 即可。

反之，若 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 满足方程，则 $f(t^{d_1}x_1, \ldots, t^{d_n}x_n)$ 满足

$$d_1 t^{d_1} x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + d_n t^{d_n} x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = d_f f,$$

于是函数 $g(t) = \frac{f(t^{d_1}x_1, \ldots, t^{d_n}x_n)}{t^{d_f}}$ 满足 $g'(t) = 0$，所以 $g(t)$ 是常数。最后取 $t = 1$ 即可。 □